

IV кръг, 12 юли 2016 г., х. Бузлуджа, теоретичен тур

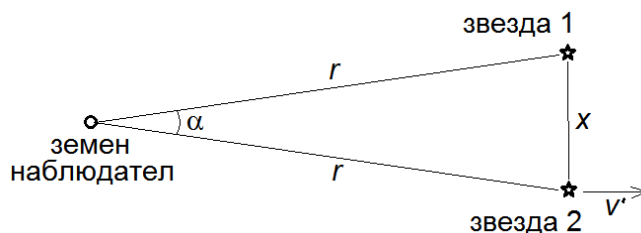
Младша възраст – решения

1 задача. Двойна звезда. Русенският астроном Мерт Мехмед съзерцава през своя голям телескоп красива двойка близко разположени звезди от Главната последователност със спектрален клас G2. Извършвайки продължителни наблюдения и измервания, той определя паралаксите на двете звезди. Те се оказват еднакви и равни на $0.016''$. Собственото движение на звездите е еднакво по величина и посока, а разликата между лъчевите им скорости е 30 км/сек.. Двете звезди отстоят на видимо ъглово разстояние $0.48''$ една от друга.

- Младият любител на астрономията решава да провери дали тези две звезди не са физически свързани от гравитацията в истинска двойна система. Направете и вие това и обосновайте вашите разсъждения.

Решение:

Да означим условно едната звезда с 1, а другата с 2. Нека преминем в координатна система, която е неподвижно свързана със звездата 1. Ще разглеждаме движението на звездата 2 относно звездата 1 в тази координатна система. Звездите имат еднакви паралакси, т.е. те са на едно и също разстояние от нас. Следователно правата, която ги свързва, е перпендикулярна на зрителния лъч от земния наблюдател към системата. След като собствените движения на звездите са еднакви по величина и посока, то относителната скорост на звездата 2 спрямо звездата 1 няма компонента, насочена перпендикулярно на зрителния лъч. Остава тази относителна скорост да е насочена по направление на зрителния лъч и да е равна на разликата между лъчевите скорости на двете звезди, определена чрез наблюдения от Земята. Тази относителна скорост е $v' = 30 \text{ km/sec}$.



Сравнявайки паралакса на системата $p = 0.016''$ и видимото ъглово отстояние между тях $\alpha = 0.48''$, можем да намерим линейното разстояние между тях в астрономически единици:

$$x = \frac{\alpha}{p} = 30 \text{ AU}$$

Забелязваме, че линейната скорост на звездата 2 относно звездата 1 е приблизително равна на орбиталната скорост на Земята около Слънцето. Да приемем, че звездата 2 се движи по кръгова орбита около звездата 1. Понеже радиусът на тази орбита е 30 пъти по-голям от радиуса на земната орбита около Слънцето, то орбиталният период на звездата би бил $T = 30$ земни години. Да определим сумата от масите на двете компоненти $M_1 + M_2$ в слънчеви маси. За целта използваме третия закон на Кеплер във вида:

$$\frac{x^3}{T^2} = M_1 + M_2$$
$$M_1 + M_2 = 30 \text{ слънчеви маси}$$

Но нека сега обърнем внимание на факта, че двете звезди имат еднакъв спектрален клас и са от Главната последователност. Това означава, че те имат приблизително еднакви маси. Но звезда от главната последователност със спектрален клас G2 трябва да е подобна на Слънцето. Съвсем невъзможно е такава звезда да има маса 15 пъти по-голяма от слънчевата маса. Така че гравитационното им привличане далеч не може да ги задържи в свързана система.

Дотук ние разглеждахме кръгово движение, при което скоростта на звездата 2 относно звездата 1 би била:

$$v' = \sqrt{\frac{\gamma(M_1 + M_2)}{x}}$$

където γ е гравитационната константа. Ние намерихме масите на звездите, при които това равенство се изпълнява. Сумата от тези маси може да се изрази по следния начин:

$$M_1 + M_2 = (v'x/\gamma)^2$$

Ако трябва да бъдем точни, необходимо е да определим при какви маси на звездите скоростта v' ще надвишава параболичната скорост, или скоростта на звездата 2, при която тя би напуснала системата. Тогава:

$$v' = \sqrt{\frac{2\gamma(M_1 + M_2)}{x}}$$

Тогава бихме получили по-малки маси за звездите:

$$M_1 + M_2 = \frac{[(v'x/\gamma)]^2}{\sqrt{2}} \approx 21.2 \text{ слънчеви маси}$$

Т.е., масата на всяка от звездите би трябвало да бъде около 10.6 слънчеви маси. Но все едно, такава маса е на порядък по-голяма от масата на звезда от Главната последователност и от спектрален клас G2.

Следователно двете звезди не могат да бъдат гравитационно свързана система, тъй като по време на наблюденията, направени от русенския астроном, те се движат с твърде висока скорост една спрямо друга и в бъдеще ще се разлетят в различни посоки.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилна теоретична идея за решение на задачата – 3 т.

За правилна математическа постановка – 4 т.

За правилни алгебрични преобразования – 4 т.

За правилен краен резултат от пресмятанията – 1 т.

За правилно тълкуване на резултата и заключение – 3 т.

2 задача. Покритие на звезда.

- Определете минималната деклинация на звезда, която може да бъде покрита от Луната за наблюдател от земната повърхност.

- На каква географска ширина по Земята и на каква височина над хоризонта ще бъде звездата при това покритие?

Решение:

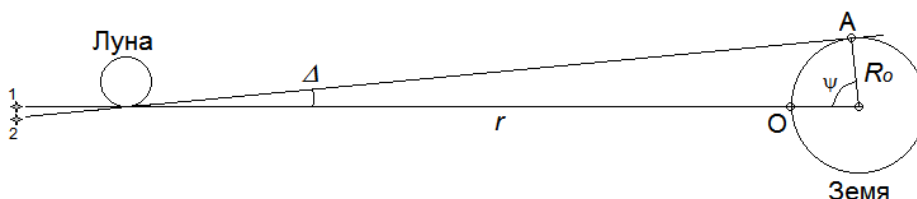
Когато разсъждаваме за минималната деклинация на звездата, ще имаме предвид, че деклинацията може да бъде както положителна, така и отрицателна. Тук под минимална стойност не се подразбира минимална абсолютна стойност. Ще трябва да отчетем няколко фактора. Първият фактор е наклонът на небесния екватор към еклиптиката, който е $\varepsilon = 23^\circ 26'$. Минималната деклинация на Луната с отчитане на този фактор е $\delta_{L0} = -23^\circ 26'$, когато тя се намира в точката на зимно слънцестояние за северното полукукло по Земята. Вторият фактор е наклонът на лунната орбита към еклиптиката, който е $i = 5.14^\circ \approx 5^\circ 08'$. Когато Луната се намира в точката от своята орбита, която е максимално отклонена на юг от еклиптиката в точката на зимното слънцестояние, то деклинацията на Луната ще бъде:

$$\delta_L = \delta_{L0} - i = -28^\circ 34'$$

Третият фактор е това, че Луната не е точков обект. Видимият ъглов радиус на Луната е $\rho = 0.25^\circ = 15'$. Следователно минималната деклинация на звезда, която може да бъде покрита от Луната, ще бъде:

$$\begin{aligned}\delta_* &= \delta_L - \rho \\ \delta_* &= -28^\circ 49'\end{aligned}$$

Още един фактор, който трябва да отчетем, е паралактичният ефект, който се проявява в това, че при наблюдение от различни точки по земната повърхност Луната се проектира в различни положения на фона на звездите. За да се вижда Луната с минимална деклинация, наблюдателят трябва да се намира колкото е възможно по-далеч на север в северното полукълбо.



Нека за наблюдател в точка О на Земята южният край на видимия лунен диск покрива звездата 1, която се намира в зенита. Нейната деклинация има пресметнатата от нас стойност δ_* . В същия момент за наблюдател в точка А най-южната точка от видимия лунен диск е все още видима над хоризонта. Този наблюдател обаче, може да наблюдава покритие на звездата 2, чията деклинация ще бъде:

$$\delta_{*min} = \delta_* - \Delta$$

Ъгъла Δ пресмятаме по формулата:

$$\Delta = \frac{R_0}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

където R_0 е радиусът на Земята, а r е разстоянието от Земята до Луната.

$$\Delta \approx 0.95^\circ \approx 57'$$

Окончателно за минималната деклинация на звезда, при която може да се наблюдава покритие от Луната, ще бъде:

$$\delta_{*min} = -29^\circ 46'$$

За точката О деклинацията на звезда, намираща се в зенита, е δ_* . Следователно географската ширина на точка О е:

$$\varphi_O = \delta_*$$

Географската ширина на точката А ще се различава с ъгъл $\psi = 90^\circ - \Delta$ от географската ширина на точка О:

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \varphi_O + \psi = \delta_* + 90^\circ - \Delta \\ \varphi_A &= 60^\circ 14'\end{aligned}$$

В разглеждания граничен случай височината над хоризонта на звездата 2 при това покритие ще бъде $h = 0^\circ$. Звездата ще лежи в точка юг на хоризонта. Ако отчетем рефракцията, обаче, звездата ще бъде на около $35'$ над хоризонта.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилна теоретична постановка, математически преобразувания и правилни числени резултати при отчитане на следните фактори:

Наклон на екватора към еклиптиката – 2 т.

Наклон на лунната орбита към еклиптиката – 2 т.

Ъглов размер на Луната – 2 т.

Паралактичен ефект – 2 т.

За определяне на географската ширина на точка А – 4 т.

За определяне на височината на звездата над хоризонта с отчитане на рефракцията – 3 т.

3 задача. Елонгация. Венера е в максимална западна елонгация на 47° от Слънцето. Известният пътешественик Борис Панайотов е открил необикновено място на Земята, където това явление се наблюдава в момент, когато Слънцето е точно на юг, а Венера е точно на север и е на същата височина над хоризонта, както и Слънцето.

- Наистина ли се е случило това, или само в сънищата на замечтания Борис? Ако се е случило наистина, то къде по Земята се е намирал той? Приблизително кога през годината е наблюдавано явлението?

- В горещ спор с Борис добре тренираният турист Дочко Маджаров твърди, че е наблюдавал някъде по планетата същата ситуация, само че Слънцето е било на изток, а Венера – на запад. Отговорете на същите въпроси за тази ситуация.

Приемаме, че орбитата на Венера лежи в равнината на еклиптиката.

Решение:

Щом Венера и Слънцето се намират точно на север и на юг, то те трябва да лежат на голям кръг, минаващ през зенита за наблюдателя. В случая този голям кръг съвпада с меридиана на мястото. От страна, Венера и Слънцето винаги лежат на еклиптиката. Следователно, за да се изпълни условието, описано от Борис, трябва в някакъв момент еклиптиката да съвпадне с меридиана на мястото за наблюдателя и да пресича хоризонта в точките север и юг. Но това означава еклиптиката да е перпендикулярна на небесния екватор. Това очевидно е невъзможно, освен в някой сън на преуморен от решаване на задачи участник в астрономическата олимпиада.

Ако Слънцето и Венера се намират точно на изток и на запад в някакъв момент, то тогава еклиптиката трябва също да минава през зенита за наблюдателя, но да пресича хоризонта в точките изток и запад. Това може да стане за наблюдател, намиращ се на северната или на южната тропична окръжност.

Да разгледаме случая, когато наблюдателят се намира на северната тропична окръжност. Тогава в зенита за него трябва да е точката на лятно слънцестояние. Венера отстои на 47° западно от Слънцето и двете светила са на една и съща височина над хоризонта. Следователно Слънцето е на $47^\circ/2 = 23.5^\circ$ източно от точката на лятно слънцестояние. Моментът на лятно слънцестояние е минал преди интервал от време, който пресмятаме по формулата:

$$t = \frac{23.5^\circ}{360^\circ} \cdot 365.25 \text{ дни} \approx 24 \text{ дни}$$

Лятното слънцестояние се случва обикновено на 22 юни, което означава, че описаната ситуация е могла да се наблюдава около 16 юли.

Нека сега наблюдателят се намира на южната тропична окръжност. Тогава в зенита за него е точката на зимно слънцестояние, Слънцето е на 23.5° източно от нея и е преминало през тази точка преди 24 дни. Зимното слънцестояние се случва обикновено на 22 декември. Следователно описаната ситуация е могла да се наблюдава около 15 януари.

Критерии за оценяване (общо 15 точки):

За правилни разсъждения по случая, когато Слънцето и Венера са на север и на юг – 3 т.

За правилно заключение – 2 т.

За правилни разсъждения по случая, когато двете светила са на запад и на изток – 3 т.

За определяне на географската ширина на наблюдателя – 2 т.

За определяне на датата, когато се е наблюдавало явлението – 2 т.

За разглеждане на случая, когато наблюдателят се е намирал в другото полукълбо на Земята и посочване на географската му ширина – 2 т.

За определяне на датата – 1 т.

Задача 4. Странният астероид. Един астероид се движи по елиптична орбита около Слънцето, в равнината на еклиптиката. При възможно най-близкото преминаване на астероида до Земята, неговата звездна величина за земния наблюдател е 7.22^m . Астероидът има орбитален период 1 година и 8 месеца, а ексцентрицитетът на орбитата му е 0.2. Приемаме, че орбитата на Земята е кръгова.

- А) Намерете звездната величина на астероида за земния наблюдател, при неговата следваща опозиция.

- Б) Ако е известно, че повърхността на астероида има сходни свойства с тази на Луната, то намерете радиуса му.

Решение:

А) Означаваме с $T_3 = 1$ година орбиталния период на Земята, а с T_A сидеричния период на астероида. Ако T_{SIN} е синодичният период на астероида, относно Земята, то можем да запишем следното равенство:

$$\frac{1}{T_{\text{SIN}}} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T}$$

Следователно:

$$T_{\text{SIN}} = \frac{T \cdot T_3}{T - T_3} = 2.5 \text{ години}$$

В условието на задачата е казано, че първата опозиция на астероида настъпва, когато той е възможно най-близо до Земята. След като приемаме земната орбита за кръгова, то можем да направим извода, че в този момент астероидът е в перихелия на своята орбита. Получихме, че втората опозиция настъпва 2.5 години след първата, което означава, че това се случва в момента в който Земята се намира точно на 180° спрямо положението в което се е намирала при първата опозиция. Следователно, астероидът също се намира в противоположната точка от своята орбита, т.е. в афелия си.

Нека a да е голямата полуос на орбитата на астероида. Съгласно третия закон на Кеплер, записан за Слънчевата система:

$$a[\text{AU}]^3 = T[\text{г}]^2,$$

Оттук намираме, че $a \approx 1.41 \text{ AU}$.

Разстоянията между астероида и Слънцето в перихелия и афелия на орбитата му са, съответно:

$$\begin{aligned} r_{\text{П}} &= a(1 - e) \approx 1.12 \text{ AU} \\ r_A &= a(1 + e) \approx 1.69 \text{ AU}. \end{aligned}$$

Съответните разстояния до Земята са:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{\text{П}} - 1 \text{ AU} = 0.12 \text{ AU} \\ r_2 &= r_A - 1 \text{ AU} = 0.69 \text{ AU} \end{aligned}$$

Когато астероидът се наблюдава в опозиция и е в перихелия на своята орбита, той създава осветеност E_1 , а във втория случай, когато е в афелий, тя е E_2 . Първата осветеност е по-голяма от втората по две причини:

- Астероидът е по-близо до Слънцето и поради това върху него попада повече енергия за единица време, съответно и „светимостта“ на отразената му светлина е по-голяма;
- Той е по-близо до земния наблюдател.

За двете осветености, можем да запишем следното:

$$E_1 \sim \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{1}{r_A^2} \quad \text{и} \quad E_2 \sim \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{1}{r_{\text{П}}^2}.$$

За отношението им е изпълнено:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2 r_A^2}{r_1^2 r_{\text{П}}^2} = \frac{[a(1+e) - 1\text{AU}]^2 (1+e)^2}{[a(1-e) - 1\text{AU}]^2 (1-e)^2} \approx 68.4$$

Ако m_1 е звездната величина на астероида при опозицията му в перихелий, а m_2 е търсената звездна величина в афелий, то съгласно закона на Погсон:

$$m_2 = m_1 + 2.5 \log \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \approx 11^m.81$$

Б) Означаваме звездната величина на пълната Луна с $m_L = 12^m.7$, а осветеността, която тя създава върху нас с E_L . От закона на Погсон можем да намерим:

$$\frac{E_L}{E_1} = 10^{0.4(m_1 - m_L)} \approx 9.3 \cdot 10^7$$

Казано е, че свойствата на повърхността на астероида и Луната са сходни, поради което можем да приемем, че те имат едно и също алbedo. Нека с R_L да означим радиуса на Луната, а с R търсения радиус на астероида. За осветеностите, които те създават върху Земята можем да запишем:

$$E_1 \sim \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{R^2}{r_{\Pi}^2} \quad \text{и} \quad E_L \sim \frac{1}{(1AU)^2} \cdot \frac{R_L^2}{r_{3-L}^2}$$

От тук следва, че:

$$\frac{E_L}{E_1} = \frac{R_L^2}{R^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_{3-L}^2} \cdot \frac{r_{\Pi}^2}{(1AU)^2}$$

Следователно:

$$R = \sqrt{\frac{E_1}{E_L} \cdot \frac{r_1}{r_{3-L}} \cdot \frac{r_{\Pi}}{1AU}} R_L \approx 9.9 \text{ km}$$

Критерии за оценка (Общо – 15т.):

А) – 9т.

- за намиране на синодичния период на астероида – 1т.
- за съобразяване на положението на астероида през следващата опозиция – 2т.
- за намиране на разстоянията от астероида до Земята в двете опозиции – 1т.
- за съобразяване на факторите от които зависи отношението на осветеностите и правилно изразяване на това отношение – 4т.
- за математически преобразувания и правилно изразяване на търсената звездна величина – 1т.

Б) – 6т.

- за правилно определяне на факторите от които зависят осветеностите, създавани от астероида и Луната – 1,5т
- за правилно изразяване на отношението на двете осветености – 2т.
- за правилни математически преобразувания и изразяване на търсения радиус – 1,5т.
- за верен числен резултат – 1т.

Справочни данни:

Звездна величина на Луната в пълнолуние: - 12.7^m

Радиус на Луната: 1 738 km

Разстояние Земя-Луна: 384 000 km

1 AU = 149.6 млн km

Наклон на лунната орбита към еклиптиката 5.14°